2005 október 25, emelt szint, 240 perc - *Az 5.-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldani!*

1. Egy háromszög két csúcsa $A(8;2)$, $B(-1;5)$, a C csúcs pedig illeszkedik az y tengelyre. A háromszög köré írt kör egyenlete: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$.
a) Adja meg a háromszög oldalfelező merőlegesei metszéspontjának koordinátáit! **b)** Adja meg a háromszög súlypontjának koordinátáit! (3+8)

2. Aladár, Béla, Csaba, Dani és Ernő szombat délutánonként együtt teniszeznek. Mikor megérkeznek a teniszpályára, mindegyik fiú kezet fog a többiekkel. **a)** Hány kézfogás történik egy-egy ilyen közös teniszezés előtt?
Legutóbb Dani és Ernő együtt érkezett a pályára, a többiek különböző időpontokban érkeztek. (3+3+6)
b) Hány különböző sorrendben érkezhettek ezen alkalommal?
c) A fiúk mindig páros mérkőzéseket játszanak, ketten kettő ellen. (Egy páron belül a játékosok sorrendjét nem vesszük figyelembe, és a pálya két térfelét nem különböztetjük meg.) Hány különböző mérkőzés lehetséges?

3. Péter nagypapája minden évben félretett némi pénzösszeget egy perselybe unokája számára. 5000 Ft-tal kezdte a takarékoskodást 1996. január 1-én. Ezután minden év első napján hozzátett az addig összegyűlt összeghez, mégpedig az előző évben félretettnél 1000 Ft-tal többet. 2004. január 1-jén a nagypapa bele tette a perselybe a megfelelő összeget, majd úgy döntött, hogy a perselyt unokájának most adja át.
a) Mekkora összeget kapott Péter?
b) Péter nagypapája ajándékából vett néhány apróságot, de elhatározta, hogy a kapott összeg nagyobb részét 2005. január 1-jén bankszámlára teszi. Be is tett 60000 Ft-ot évi 4%-os kamatos kamatra (a kamatok minden évben, év végén hozzáadódnak a tőkéhez). Legalább hány évig kell Péternek várnia, hogy a számláján legalább 100000 Ft legyen úgy, hogy közben nem fizet be erre a számlára? (5+9)

4. a) Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben az $f:[0,7]\to R;\ f(x)=\left|x^2-6x+5\right|$ függvényt! **b)** Adja meg az f függvény értékkészletét!
c) A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az $|x^2 - 6x + 5| = p$ egyenletnek a [0,7] intervallumon? (4+2+8)

5. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!
$$\left.\begin{array}{l}\log_x\left(x^2 y^3\right)+\log_y\left(x^3 y\right)=9\\ \cos(x+y)+\cos(x-y)=0\end{array}\right\}$$
(16)

6. A következő táblázat egy 30 fős kilencedik osztály első félév végi matematikaosztályzatainak megoszlását mutatja.

Érdemjegy	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Tanulók száma	4	7	9	8	2

a) Ábrázolja az érdemjegyek eloszlását oszlopdiagramon!
b) Mennyi a jegyek átlaga?
c) Véletlenszerűen kiválasztjuk az osztály egy tanulóját. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a tanuló legalább 3-ast kapott félév végén matematikából?
d) Két tanulót véletlenszerűen kiválasztva mennyi a valószínűsége annak, hogy érdemjegyeik összege osztható 3-mal? (3+2+3+8)

7. a) A KLMN derékszögű trapéz alapjai KL= $2\sqrt{12}$ és MN= $3\sqrt{75}$ egység hosszúak, a derékszögű szár hossza $10\sqrt{2}$ egység. A trapézt megforgatjuk az alapokra merőleges LM szár egyenese körül. Számítsa ki a keletkezett forgástest térfogatát! (π két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon, és az eredményt is így adja meg!)
b) Az ABCD derékszögű érintőtrapéz AB és CD alapjai ($AB > CD$) hosszának összege 20. A beírt körnek az alapokra nem merőleges AD szárral vett érintési pontja negyedeli az AD szárat. Számítsa ki a trapéz oldalainak hosszát! (4+12)

8. a) Egy osztály tanulói a tanév során három kiránduláson vehettek részt. Az elsőn az osztály tanulóinak 60 százaléka vett részt, a másodikon 70 százalék, a harmadikon 80 százalék. Így három tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult. Hány tanulója van az osztálynak?
b) A három közül az első kiránduláson tíz tanuló körmérkőzéses asztaliteniszbajnokságot játszott. (Ez azt jelenti, hogy a tíz tanuló közül mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést vívott.) Mutassa meg, hogy 11 mérkőzés után volt olyan tanuló, aki legalább háromszor játszott!
c) A második kirándulásra csak az osztály kosárlabdázó tanulói nem tudtak elmenni, mivel éppen mérkőzésük volt. A kosarasok átlagmagassága 182 cm, az osztály átlagmagassága 174,3 cm. Számítsa ki a kiránduláson részt vevő tanulók átlagmagasságát! (6+4+6)

9. Egy centiméterben mérve egész szám élhosszúságú kockát feldaraboltunk 99 kisebb kockára úgy, hogy közülük 98 darab egybevágó, 1 cm élű kocka. Számítsa ki az eredeti kocka térfogatát! (16)