2006 február 21, emelt szint, 240 perc - *Az 5.-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldani!*

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet! $\cos 2x + 4\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ (12)

2. Az 52 941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben. **a)** Az 52 941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk?
b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel? **c)** Bizonyítsa be, hogy e számok egyike sem négyzetszám! (2+6+4)

3. Egy automatából 100 Ft értékű ital kapható, s az automatába csak 100 Ft-os érme dobható be. Az italautomata gyakran hibásan működik. 160 kísérletet végezve azt tapasztaljuk, hogy

az esetek 18,75%-ában az automata elnyeli a pénzt, és nem ad italt;
90 esetben visszaadja a 100 forintost, anélkül, hogy italt adna;
30 esetben italt is ad és a 100 Ft-os érmét is visszaadja;
és csak a fennmaradó esetekben működik rendeltetésszerűen.

a) Mekkora annak az esélye az adatok alapján, hogy egy százast bedobva az automata rendeltetésszerűen fog működni?
b) Minek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy ingyen ihatunk, vagy annak, hogy ráfizetünk?
c) Várhatóan mennyi lesz a ráfizetése annak, aki 160-szor próbál vásárolni ennél az automatánál? (4+5+4)

4. Állítsuk a pozitív egészeket növekvő sorba, majd bontsuk rendre 1-gyel növekvő elemszámú csoportokra, így: (1), (2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9; 10), …
a) A 100-adik csoportnak melyik szám az első eleme? **b)** Az 1851 hányadik csoport hányadik eleme? (5+9)

5. Az *ABCD* trapéz párhuzamos oldalai *AB* és *CD*, és *AB* > *CD*. A trapéz átlóinak metszéspontja *K*. Az *ABK* háromszög *AB* oldalához tartozó magassága kétszerese a *CDK* háromszög *CD* oldalához tartozó magasságának. Jelölje *T* az *ADK* háromszög területét. Hányszorosa az *ABCD* trapéz területe *T*-nek? (16)

6. A „TOJÁS” farmon átlagosan 10 000 tyúkot tartanak. Ezek egy év alatt mintegy 2,20 millió tojást tojnak. A tenyésztők azt tapasztalták, hogy a zsúfoltság csökkenése miatt ha a tyúkok számát 4%-kal csökkentik, akkor az egy tojóra jutó átlagos tojástermelés 8%-kal nő.
a) A tyúkok számának 4%-os csökkentése után, mennyi lett a tojásfarmon az évi termelés?
Tudjuk, hogy a tyúkok számának *p%*-kal történő csökkentése 2*p*%-kal növeli az egy tyúkra vonatkozó tojásmennyiséget – de ez csak $p < 30$ esetén érvényes!
b) Hány százalékkal csökkentették a tyúkok számát, ha így évi 8%-os termelésnövekedést értek el egy év alatt? (5+11)

7. A dominókészleten a dominókövek mindegyikén az egy-egy „térfélen” elhelyezett pöttyök száma 0-tól egy megengedett maximális értékig bármilyen természetes szám lehet. A dominókövek két felén e számok minden lehetséges párosítása szerepel. Nincs két egyforma kő a készletben.
a) Igazolja, hogy ha a pöttyök maximális száma 7, akkor a dominókészlet 36 kőből áll.
b) A 36 kőből álló dominókészletből véletlenszerűen kiválasztottunk egy követ. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott kő két „térfelén” lévő pöttyök számának összege 8?
c) A 36 kőből álló dominókészletből ezúttal két követ választottunk ki véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két dominókő a játék szabályai szerint egymáshoz illeszthető? (Két dominókő összeilleszthető, ha van olyan „térfelük”, amelyen a pöttyök száma ugyanannyi.) (5+3+8)

8. Kartonpapírból kivágtunk egy 1,5 dm magasságú *ABC* szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húztunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyiktől ugyanakkora, 0,5 deciméternél kisebb *x* távolságra. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldalegyenesei.
a) Írja fel az $A_1B_1C_1$ háromszög területét *x* függvényében!
b) Szeretnénk egy $A_1B_1C_1$ alapú, *x* magasságú, felül nyitott egyenes hasáb alakú íróasztali tolltartót létrehozni a lapból, ezért levágtuk a fölösleget, majd az $A_1B_1C_1$ háromszög élei mentén felhajtottuk a hasáb oldallapjait. Mekkora *x* esetén lesz a keletkezett hasáb térfogata maximális? (6+10)

9. Az A pont helyvektora: $\underline{OA}(\log a\,, \log b)$, a B pont helyvektora: $\underline{OB}\left(\log ab\,, \log\frac{b}{a}\right)$, ahol $0 < a < 1$, illetve $1 < b$ valós számok.
a) Bizonyítsa be, hogy a B pont mindkét koordinátája nagyobb az A pont megfelelő koordinátájánál!
b) Bizonyítsa be, hogy az $\underline{OA} - \underline{OB}$ vektor merőleges az $\underline{OA}$ vektorra!
c) Mekkora az $\underline{OA}$ és az $\underline{OB}$ vektorok hajlásszöge?
d) Legyen $a = \frac{1}{10}$, *b* pedig jelöljön tetszőleges 1-nél nagyobb valós számot. Adja meg (egyenletével, vagy a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva) az A, illetve a B pontok halmazát! (3+3+4+6)