

2006 május 9, emelt szint, 240 perc - Az 5.-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldani!

1. A $PQRS$ négyszög csúcsai: $P(3;-1)$, $Q(1;3)$, $R(-6;2)$ és $S(-5;-5)$. Döntse el, hogy az alábbi három állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Válaszait indokolja, támassza alá számításokkal!

a) A állítás: A $PQRS$ négyszögnek nincs derékszöge.

b) B állítás: A $PQRS$ négyszög húrnégyszög.

c) C állítás: A $PQRS$ négyszögnek nincs szimmetriacentruma.

(4+4+5)

2. Legyen adott az $f: [-2,5; 2,5] \rightarrow R; f(x) = x^3 - 3x$ függvény.

a) Határozza meg az f függvény zérushelyeit!

b) Vizsgálja meg az f függvényt monotonitás szempontjából!

c) Adja meg az f függvény legnagyobb és legkisebb értékét!

(4+6+4)

3. Oldja meg az egyenletrendszert, ahol x és y valós számok!

$$\left. \begin{array}{l} 10^y = x - 3 \\ \lg(x^2 - 4x + 3) = 2y + 1 \end{array} \right\} \quad (11)$$

4. a) Legyen (a_n) egy mértani sorozat, melynek első tagja 5, hányadosa 3. Mennyi a valószínűsége, hogy ha ennek a mértani sorozatnak az első 110 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad?

b) Legyen (b_n) egy számtani sorozat, amelynek az első tagja 5, és a differenciája 3. Mekkora a valószínűsége, hogy ha ennek a számtani sorozatnak az első 110 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad? (6+7)

5. Panni és Kati elvállalta, hogy szövegszerkesztővel gépelik Dani szakdolgozatát. A két lány együttes munkával 12 munkaóra alatt végezze a gépeléssel. Kedden reggel 8 órakor kezdett Panni a munkához, Kati 10 órakor fogott hozzá. Megállás nélkül, ki-ki egyenletes sebességgel dolgozott kedden 14 óráig, ekkor a kéziratnak a 40%-ával végeztek, és abbahagyták a munkát.

a) Hány óra alatt gépelné le Panni, illetve Kati a teljes szakdolgozatot (állandó munkatempót, és megszakítás nélküli munkát feltételezve)?

Szerdán reggel egyszerre kezdtek hozzá 9 órakor a gépeléshez, és együtt egyszerre fejezték be. Szerdán Panni fél óra ebédszünetet tartott, Kati pedig a délelőtti munkáját egy órányi időtartamra megszakította. **b)** Hány órakor végeztek a lányok a munkával szerdán? (9+7)

6. Egy közvélemény-kutató intézet felméréséből kiderült, hogy a felnőttek 4%-a szintévesztő. Véletlenszerűen kiválasztunk 8 felnőttet abból a népességből, melyre ez a felmérés vonatkozott. Mekkora a valószínűsége, hogy közöttük

a) pontosan két személy szintévesztő?

b) legalább két személy szintévesztő?

A két valószínűség értékét ezred pontossággal adja meg!

Ebben az intézetben 8 férfi és 9 nő dolgozik főállásban. Egy megbeszélés előtt, amikor csak ez a 17 főállású kutató jelent meg, a különböző nemű kutatók között 45 kézfogás történt. Tudjuk, hogy minden nő pontosan 5 férfival fogott kezét, és nincs két nő, aki pontosan ugyanazzal az öttel.

c) Lehetséges-e, hogy volt két olyan férfi is, aki senkivel sem fogott kezét?

(3+8+5)

7. A GAMMA együttes magyarországi koncertkörútja során öt vidéki városban lépett fel. Az alábbi táblázat tartalmazza a körút néhány üzleti adatát.

város	fizető nézők száma	egy jegy ára (Ft)	bevétel a jegyeladásból (ezer Ft)
Debrecen	12350		14820
Győr	8760		12264
Kecskemét		1600	22272
Miskolc	9970	1500	
Pécs		1300	15405

a) A koncertturné során melyik városban adták el a legtöbb jegyet? b) Mennyi volt az összes eladott jegy átlagos ára?

Bea elment Budapesten a GAMMA együttes koncertjére, és becslése szerint ott 50 000 ember hallgatta a zenét. Peti Prágában volt ott az együttes koncertjén, ahol a nézők számát 60 000 főre becsülte. A GAMMA együttes menedzsere, aki ismerte a tényleges nézőszámokat, elárulta, hogy:

Budapesten a tényleges nézőszám nem tér el 10 %-nál többel a Bea által adott becsléstől.

Peti becslése nem tér el 10 %-nál többel a tényleges prágai nézőszámtól.

c) Mekkora a budapesti és a prágai nézőszám közötti eltérés lehetséges legnagyobb értéke, a kerekítés szabályainak megfelelően ezer főre kerekítve?

d) A fenti adatok ismeretében előfordulhatott-e, hogy Pesten és Prágában ugyanannyi ember volt a GAMMA együttes koncertjén? (3+4+6+3)

8. a) Ábrázolja függvény-transzformációk segítségével a $[-3; 4]$ intervallumon az $x \rightarrow x^2 - 2|x| - 3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt!

b) Legyen az f , g és h függvények értelmezési tartománya \mathbb{R} , hozzárendelési szabályuk: $f(x) = x^2 - 2x - 3$; $g(x) = x - 3$; $h(x) = |x|$. Képezzünk egyszeresen összetett függvényeket a szokásos módon. Például $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 - 2x - 3) - 3 = x^2 - 2x - 6$.

Készítse el a fenti példának megfelelően az f , g és h függvényekből pontosan két különböző felhasználásával képezhető egyszeresen összetett függvényeket! Sorolja fel valamennyit! (A példában szereplőt nem szükséges újra felírni.)

c) Keressen példát olyan p és t , a valós számok halmazán értelmezett függvényre, amelyre $(t \circ p)(x) = (p \circ t)(x)$! Adja meg p és t szabályát! (6+6+4)

9. Az $ABCD A'B'C'D'$ téglatestben úgy jelöltük a csúcsoakat, hogy az $ABCD$ alaplappal egybevágó lapon az A' csúcsot az A -val, a B' csúcsot a B -vel, a C' csúcsot a C -vel, a D' csúcsot a D -vel kösse össze él. Tudjuk, hogy a DAD' szög 45° -os, a BAB' szög 60° -os.

a) Mekkora a $B'AD'$ szög koszinusza?

b) Mekkora az $AB'A'D'$ tetraéder térfogata, ha a téglatest legrövidebb éle 10? (6+4+6)

c) Mekkora az $AA'D'$ és az $AB'D'$ síkok hajlásszöge?