

2007 május 8, emelt szint, 240 perc - Az 5.-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldani!

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\frac{x^2 - 10x - 24}{x^2 - x - 6} = \sin \frac{\pi}{2} - \log 1 + 2^{\log_2 9} \quad (11)$$

2. Az ABC derékszögű háromszög BC befogójának hossza 18 cm, a CA befogójának hossza 6 cm. **a)** Mekkora a háromszög hegyesszögei?
 A BC befogó egy P belső pontját összekötjük az A csúccsal. Tudjuk még, hogy $PB = PA$. **b)** Milyen hosszú a PB szakasz?
 Állítsunk merőleges egyenest az ABC háromszög síkjára a C pontban! A merőleges egyenes D pontjára teljesül, hogy CD hossza 15 cm. **c)** Mekkora az $ABCD$ tetraéder térfogata?
 (3+6+4)

3. Egy pozitív tagokból álló mértani sorozat első három tagjának összege 26. Ha az első taghoz egyet, a másodikhoz hatot, a harmadikhoz hármat adunk, akkor ebben a sorrendben egy számtani sorozat első három tagját kapjuk. Adja meg ennek a számtani sorozatnak az első három tagját! (11)

4. **a)** Ábrázolja a $[0;6]$ intervallumon értelmezett $x \rightarrow x^2 - 8x + 11$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt!
b) Adja meg az $y = x^2 - 8x + 11$ egyenlettel megadott alakzat $P(5;-4)$ pontjában húzott érintőjének egyenletét! (3+10)

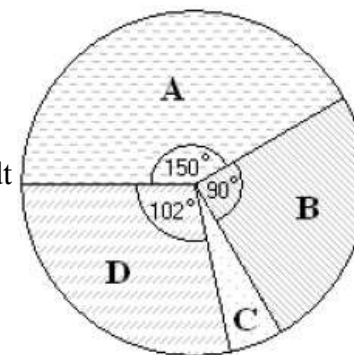
5. **a)** Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$ kifejezés értelmezhető!
b) Ábrázolja a $[-5; 8]$ intervallumon értelmezett $f: x \rightarrow \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ függvényt!
c) Melyik állítás igaz és melyik hamis a fenti f függvényre vonatkozóan? Válaszát írja a sor végén levő téglalapba! (Az indoklást nem kell leírnia.)
A: Az f értékkészlete: $[0; 5]$. **B:** Az f függvény minimumát az $x = -3$ helyen veszi fel. **C:** Az f függvény szigorúan monoton nő a $[4;8]$ -n.
d) Határozza meg az $\int_{-3}^3 (x^2 - 6x + 9) dx$ értékét! (2+5+3+6)

6. Az érett szilva tömegének kb. 5%-a a mag tömege. A kimagozott szilva átlagosan 90% vizet és 10% ún. szárazanyagot tartalmaz. A szilva aszalásakor a szárítási technológia során addig vonunk el vizet a magozott szilvából, amíg a megmaradt tömegnek csak az 5%-a lesz víz, a többi a változatlan szárazanyag-tartalom. A kapott terméket nevezzük aszalt szilvának.

- a)** A fentiek figyelembevételével mutassa meg, hogy 10 kg leszedett szilvából 1 kg aszalt szilva állítható elő!
 Az aszalt szilva kilóját 1400 Ft-ért, a nyers szilvát pedig 120 Ft-ért lehet értékesíteni.
b) Kovács úr szilvatermésének felét nyersen, másik felét pedig aszalt szilvaként adta el. Hány kg volt Kovács úr szilvatermése, ha a nyers és az aszalt szilvából összesen 286 000 Ft bevételhez jutott?

A piacon pénteken összesen 720 kg szilvát adtak el. Ez a mennyiség az alábbi kördiagram szerint oszlik meg az A, B, C és D fajták között.

- c)** Átlagosan mennyit fizettek a vevők egy kilóért pénteken, ha az egyes fajták ára: A – 120 Ft/kg, B – 200 Ft/kg, C – 230 Ft/kg, D – 260 Ft/kg. (6+3+7)



7. Adott az $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz. a) Adja meg az A halmaz háromelemű részhalmazainak a számát!
 b) Az A halmaz elemeiből hány olyan ötlet osztható hatjegyű szám írható fel, amelyben a számjegyek nem ismétlődhetnek?
 c) Az A halmaz elemeiből hány olyan hatjegyű szám írható fel, amely legalább egy egyest tartalmaz? (3+6+7)

8. Két közvélemény-kutató cég mérte fel a felnőttek dohányzási szokásait. Az egyik cég a véletlenszerűen választott 800 fős mintában 255 rendszeres dohányost talált, a másik egy hasonlóan véletlenszerűen választott 2000 fős mintában 680-at.
 a) Adja meg mindkét mintában a dohányosok relatív gyakoriságát!
 b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy ha a fenti 2000 fős mintából véletlenszerűen kiválasztunk 3 főt, akkor éppen 1 dohányos van közöttük?
 c) Tegyük fel, hogy a lakosság 34%-a dohányos. Számolja ki annak a valószínűségét, hogy az országban 10 találmóra kiválasztott felnőtt közül egy sem dohányos! (4+7+5)

9. Az 1. ábra szerinti padlástér egy 6·6 méteres négyzet alapú gúla, ahol a tető csúcsa a négyzet középpontja felett 5 méter magasan van.

- a) Milyen szöget zárnak be a tetősíkok a vízszintessel (padlássíkkal)?

Hasznos alapterületnek számít a tetőtérben az a terület, amely fölött a (bel)magasság legalább 1,9 méter.

- b) Mennyi lenne a tetőtér beépítésekor a hasznos alapterület?

A tető cseréjekor a hasznos alapterület növelésének érdekében a ház oldalfalait egy ún. koszorúval kívánják magasítani. A ház teljes magassága – építészeti előírások miatt – nem növelhető, ezért a falak magasítása csak úgy lehetséges, ha a tető síkjának meredekségét csökkentik (2. ábra).

Jelölje x a koszorú magasságát és T a hasznos alapterületet.

- c) Írja fel a $T(x)$ függvény hozzárendelési szabályát! (4+6+6)

