2007 október 25, középszint - *Az első 12 feladatra 45 perc áll rendelkezésre! A második rész 16.-18. feladatai közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldani! A második részre 135 perc áll rendelkezésre.*

1. Az A halmaz elemei a háromnál nagyobb egyjegyű számok, a B halmaz elemei pedig a húsznál kisebb pozitív páratlan számok. Sorolja fel az $A \cap B$ halmaz elemeit! (2)

2. Az $a = 2$ és $b = -1$ esetén számítsa ki C értékét, ha $\frac{1}{C} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$! (2)

3. Melyik a nagyobb: $A = \sin \frac{7\pi}{2}$ vagy $B = \log_2 \frac{1}{4}$? (2)

4. Egy dobozban húsz golyó van, aminek 45 százaléka kék, a többi piros. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha találomra egy golyót kihúzunk, akkor az piros lesz? (3)

5. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis! (1+1+1)
a) Ha egy természetes szám osztható hattal és tízzel, akkor osztható hatvannal.
b) A 20-nál kisebb pozitív prímszámok összege páratlan.
c) A deltoid átlói felezik a belső szögeket.

6. Adja meg a $\lg x^2 = 2\lg x$ egyenlet megoldáshalmazát! (2)

7. Egy számtani sorozat első és ötödik tagjának összege 60. Mennyi a sorozat első öt tagjának összege? Válaszát indokolja! (3)

8. Hány olyan háromjegyű szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, amelyikben csupa különböző számjegyek szerepelnek? (2)

9. Mely valós számokra teljesül a $[0,2\pi]$ intervallumon a $2\sin x = 1$ egyenlőség? (2)

10. Fejezze ki az $\mathbf{i}$ és a $\mathbf{j}$ vektorok segítségével a $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektort, ha $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ és $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$! (3)

11. Öt szám átlaga 7. Az öt szám közül négyet ismerünk, ezek az 1, a 8, a 9 és a 12. Határozza meg a hiányzó számot! (3)

12. Adja meg a $[-2; 3]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x^2 + 1$ függvény értékkészletét! (3)

13. a) Mely pozitív egész számokra igaz a következő egyenlőtlenség? $5^{x-2} < 5^{13-2x}$ (4) **b)** Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet! $9^{\sqrt{x}} = 3^{x-3}$ (8)

14. Az iskola rajztermében minden rajzasztalhoz két széket tettek, de így a legnagyobb létszámú osztályból nyolc tanulónak nem jutott ülőhely. Minden rajzasztalhoz betettek egy további széket, és így hét üres hely maradt, amikor ebből az osztályból mindenki leült.
a) Hány rajzasztal van a teremben? Hányan járnak az iskola legnagyobb létszámú osztályába? (6)
A rajzterem falát (lásd az ábrán) egy naptár díszíti, melyen három forgatható korong található. A bal oldali korongon a hónapok nevei vannak, a másik két korongon pedig a napokat jelölő számjegyek forgathatók ki. A középső korongon a 0, 1, 2, 3; a jobb szélsőn pedig a 0, 1, 2, 3, ..., 8, 9 számjegyek szerepelnek. Az ábrán beállított dátum február 15. Ezzel a szerkezettel kiforgathatunk valóságos vagy csak a képzeletben létező „dátumokat".
b) Összesen hány „dátum" forgatható ki? (3)
c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három korongot véletlenszerűen forgatva létező dátumot kapunk, ha az év nem szökőév? (3)

15. Egy négyzet és egy rombusz egyik oldala közös, a közös oldal 13 cm hosszú. A négyzet és a rombusz területének az aránya 2 : 1. **a)** Mekkora a rombusz magassága? (5
b) Mekkorák a rombusz szögei? (3) **c)** Milyen hosszú a rombusz hosszabbik átlója? A választ két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (4)

16. Egy televíziós vetélkedőn 20 játékos vesz részt. A műsorvezető kérdésére a lehetséges három válasz közül kell a játékosoknak az egyetlen helyes megoldást kiválasztani, melyet az A, a B vagy a C gomb megnyomásával jelezhetnek. A vetélkedő három fordulóból áll, minden fordulóban négy kérdésre kell válaszolni. Amelyik versenyző hibásan válaszol, 0 pontot kap. A helyes válaszért annyi pont jár, ahány helytelen válasz született (pl. ha Péter jól válaszol és 12-en hibáznak, akkor Péter 12 pontot szerez).
a) Töltse ki az első forduló táblázatának hiányzó adatait! (4)
b) Hány százalékkal növekedett volna Anikó összpontszáma az első fordulóban, ha a második kérdésre is jól válaszolt volna? (A többi játékos válaszát változatlannak képzeljük.) (3)
c) Ha Anikó valamelyik másik fordulóban mind a négyszer találgat, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy minden válasza helyes? (3)
d) Hány játékosnak kell helyesen válaszolnia egy adott kérdésre ahhoz, hogy a 20 játékosnak erre a kérdésre kapott összpontszáma a lehető legtöbb legyen? Válaszát indokolja! (7)

Első forduló eredményei	**1. kérdés**	**2. kérdés**	**3. kérdés**	**4. kérdés**
Anikó válasza	helyes	hibás	helyes	
Jó válaszok száma	7	10		8
Anikó elért pontszáma			5	0

17. Szabó nagyinak öt unokája van, egy lány és négy fiú. Minden héten ír egy-egy unokájának, így öt hét alatt mindegyik unoka kap levelet.
a) Hányféle sorrendben kaphatják meg az unokák a levelüket az öt hét alatt? (3)
b) Ha a nagymama véletlenszerűen döntötte el, hogy melyik héten melyik unokájának írt levél következik, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy lányunokája levelét az ötödik héten írta meg? (3)
Szabó nagymama sálat kötött egyetlen lányunokájának. Az első napon 8 cm készült el a sálból, és a nagymama elhatározta, hogy a további napokon minden nap 20 százalékkal többet köt meg, mint az előző napon. Ezt az elhatározását tartani tudta.
c) Hány nap alatt készült-el a 2 méter hosszúra tervezett sál? (11)

18. Egyenlő szárú háromszög alapja 40 cm, szárainak hossza 52 cm. A háromszöget megforgatjuk a szimmetriatengelye körül. (két tizedesjegyre!)
a) Készítsen vázlatrajzot az adatok feltüntetésével, és számítsa ki, hogy mekkora a keletkező forgáskúp nyílásszöge? (4) **b)** Számítsa ki a keletkező forgáskúp térfogatát! (3)
c) Mekkora a felszíne annak a gömbnek, amelyik érinti a kúp alapkörét és a palástját? (6) **d)** Mekkora a kúp kiterített palástjának területe? (4)