

2008 május 06, emelt szint, 240 perc - Az 5.-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldani!

1. Anett és Berta egy írott szöveget figyelmesen átolvasott. Anett 24 hibát talált benne, Berta 30-at. Ezek között 12 hiba volt csak, amit mindketten észrevettek. Később Réka is átnézte ugyanazt a – javítatlan – szöveget, és ő is 30 hibát talált. Réka az Anett által megtalált hibákból 8-at vett észre, a Berta által észleltekből 11-et. Mindössze 5 olyan hiba volt, amit mind a hárman észrevettek.

- a) Együtt összesen a szöveg hány hibáját fedezték fel?
 b) A megtalált hibák hány százalékát vették észre legalább ketten? (9+4)

2. Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán! $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 3} = 2$ (10)

3. Egy utazási iroda az országos hálózatának 55 értékesítő helyén kétféle utat szervez Párizsba. Az egyiket autóbusszal (A), a másikat repülővel (R). Egy adott turnusra nézve összesítették az egyes irodákban eladott utak számát. Az alábbi táblázatból az összesített adatok olvashatók ki. Pl. az (1;2) „koordinátájú” 5-ös szám azt jelöli, hogy 5 olyan fiókiroda volt, amelyek az adott turnusra 1 db autóbusszos és 2 db repülőst utat adott el.

- a) Összesen hány autóbusszos és hány repülőst utat adtak el a vizsgált turnusra az 55 fiókban?
 b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 55 fiókiroda közül véletlenszerűen választva egyet, ebben az irodában 5-nél több párizsi utat adtak el? (7+7)

		A típusú eladott utak száma				
		0	1	2	3	4
R típusú eladott utak száma	0	1	1	0	1	2
	1	1	2	2	3	1
	2	1	5	2	4	3
	3	0	3	1	9	2
	4	1	3	3	2	2

4. Egy urnában csak piros, zöld és kék golyók vannak. A piros golyók száma 18. Egy golyó kihúzása esetén annak a valószínűsége, hogy nem piros golyót (azaz zöldet vagy kéket) húzunk $1/15$ -del kisebb, mint azé, hogy zöld vagy piros golyót húzunk. Annak a valószínűsége viszont, hogy kék vagy piros golyót húzunk $11/10$ -szer nagyobb, mint annak, hogy zöld vagy piros golyót húzunk. Hány zöld és hány kék golyó van az urnában? (14)

5. Egy háromszög két oldalegyenese: az x tengely, valamint az $y = \frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes. Ismerjük a háromszög beírt körének egyenletét is:

- $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$. Írja fel a háromszög harmadik oldalegyenesének egyenletét, ha a háromszög egyenlő szárú, és
 a) az alapja az x tengelyre illeszkedik; b) az adott oldalegyenesek a háromszög száregyenesei! (7+9)

6. a) Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x) = x^3 + kx^2 + 9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl.) Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x=1$ lokális szélsőérték-helye a függvénynek! Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x=1$ a függvénynek lokális maximumhelye, vagy lokális minimumhelye! Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőérték-helye is!

b) Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x) = x^3 - 9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját! (11+5)

7. Annának az IWIW-en 40 ismerőse van. (Az IWIW weboldalon lehetőség van az egymást ismerő emberek kapcsolatfelvételére. Ebben a feladatban minden ismeretséget kölcsönösnek tekintünk.) Anna ismerőseinek mindegyike Anna többi ismerőse közül pontosan egyet nem ismer.

- a) A szóba került 41 ember között összesen hány ismeretség áll fenn?
 b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna 40 ismerőse közül véletlenszerűen választva kettőt, ők ismerik egymást?
 c) Válasszunk most a 41 személy közül véletlenszerűen kettőt! Mennyi a valószínűsége, hogy nem ismerik egymást? (5+5+6)

8. Legyen n pozitív egész. Adottak az alábbi sorozatok:

$$\{a_n\}, \text{ ahol } a_n = (-2)^n + 2^n \qquad \{b_n\}, \text{ ahol } b_n = |n - 23| - |n - 10| \qquad \{c_n\}, \text{ ahol } c_n = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right)^2 .$$

Vizsgálja meg mindhárom sorozatot korlátosság és monotonitás szempontjából! Válaszoljon mindhárom esetben, hogy a sorozat korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem! (Válaszait indokolja!) Korlátos sorozat esetében adjon meg egy alsó és egy felső korlátot! (16)

9. Klári teasüteményt sütött. A meggyúrt tésztát olyan „téglatest” alakúra nyújtotta ki, amelynek a felülről látható lapja $30 \text{ cm} \cdot 60 \text{ cm}$ méretű téglalap. Majd egy henger alakú szaggatóval (határoló körének sugara 3 cm) „körlapokat” vágott ki a tésztából. Ezután a körlapokból először „holdacskákat” vágott le úgy, hogy a szaggató határoló körének középpontját a már kivágott körlap középpontjától 2 cm távolságra helyezte el, és így vágott bele a körlapba. (Minden bevágásnál csakis egy körlapot vágott ketté.) Miután minden körlapból levágott egy „holdacskát”, a körlapokból visszamaradt részek mindegyikéből – egy másik szaggatóval – kivágott egy-egy lehető legnagyobb körlap alakú süteményt.

- a) Hány cm^2 területű egy „holdacska” felülről látható felülete? (Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!)
 Klári a „holdacskák” és a kis körlapok elkészítése után visszamaradt tésztát ismét összegyúrta, majd ugyanolyan vastagságúra nyújtotta ki, mint az első esetben, de most négyzet alakú lett a kinyújtott tészta.
 b) Hány cm hosszú ennek a négyzetnek az oldala, ha Klári a $30 \text{ cm} \cdot 60 \text{ cm}$ -es téglalaphoz eredetileg 50 darab 3 cm sugarú körlapot szaggatott ki? (Az eredményt egészre kerekítve adja meg!) (11+5)

