2009 május 5, emelt szint, 240 perc - *Az 5.-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldani!*

1. Egy négyzet alapú egyenes hasáb alapéle 18 egység, testátlója $36\sqrt{2}$ egység. **a)** Mekkora szöget zár be a testátló az alaplap síkjával?
b) Hány területegység a hasáb felszíne? (A felszín mérőszámát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!)
c) Az alapél és a testátló hosszát - ebben a sorrendben – tekintsük egy mértani sorozat első és negyedik tagjának! Igazolja, hogy az alaplap átlójának hossza ennek a sorozatnak második tagja! (4+3+4)

2. Egy gimnázium egyik érettségiző osztályába 30 tanuló jár, közülük 16 lány. A lányok testmagassága centiméterben mérve az osztályozó naplóbeli sorrend szerint: 166, 175, 156, 161, 159, 171, 167, 169, 160, 159, 168, 161, 165, 158, 170, 159.
a) Számítsa ki a lányok testmagasságának átlagát! Mekkora az osztály tanulóinak centiméterben mért átlagmagassága egy tizedesjegyre kerekítve, ha a fiúk átlagmagassága 172,5 cm?
Ebben a 30 fős osztályban a tanulók három idegen nyelv közül választhattak, ezek az angol, a német és a francia.
b) Hányan tanulják mindhárom nyelvet, és hányan nem tanulnak franciát, ha tudjuk a következőket:
(1) Minden diák tanul legalább két idegen nyelvet. (2) Az angolt is és németet is tanuló diákok száma megegyezik a franciát tanulók számával.
(3) Angolul 27-en tanulnak. (4) A németet is és franciát is tanulók száma 15. (5+7)

3. a) Egy derékszögű háromszög egyik oldalegyenese valamelyik koordinátatengely, egy másik oldalegyenesének egyenlete $2x + y = 10$, egyik csúcsa az origó. Hány ilyen tulajdonságú háromszög van? Adja meg a hiányzó csúcsok koordinátáit!
b) Jelölje e azokat az egyeneseket, amelyeknek egyenlete $2x + y = b$, ahol b valós paraméter. Mekkora lehet b értéke, ha tudjuk, hogy van közös pontja az így megadott e egyenesnek és az origó középpontú, 4 egység sugarú körnek? (6+8)

4. Legyen f és g is a valós számok halmazán értelmezett függvény: $f(x)=\begin{cases} -1, & x\le -1 \\ 2x+1, & -1<x<0 \\ 1, & 0\le x \end{cases}$ és $g(x) = x^2 - 2$.
a) Ábrázolja ugyanabban a koordinátarendszerben mindkét függvényt! Adja meg az $f(x) = g(x)$ egyenlet valós megoldásait!
b) Számítsa ki a két függvény grafikonja által közrefogott zárt síkidom területét! (6+8)

5. Igazolja, hogy az alábbi négy egyenlet közül az **a)** és **b)** jelű egyenletnek pontosan egy megoldása van, a **c)** és **d)** jelű egyenletnek viszont nincs megoldása a valós számok halmazán! (4+4+4+4)

a) $\dfrac{2x^2+x-10}{2^{x-1}-2}=0$ **b)** $\sqrt{x+16}+\sqrt{x-9}=5$ **c)** $\lg(x^2 + x - 6) = \lg(1- x^2)$ **d)** $\sin x - 1 = \sqrt{lg(\cos^2 x - 1{,}5\cos x)}$

6. Egy nagyvárosban a helyi járatokon olyan buszjegyet kell érvényesíteni, amelyen egy 3x3-as négyzetben 1–9-ig szerepelnek a számok (lásd 1. ábra). A jegy érvényesítésekor a jegykezelő automata a kilenc mezőből mindig pontosan hármat lyukaszt ki.
a) Rajzolja le az összes olyan lyukasztást, amelyben minden sorban és minden oszlopban pontosan egy kilyukasztott mező van! Indokolja, hogy miért ezek és csak ezek a lehetséges lyukasztások!

b) Rajzoljon a 2. ábrán megadott mezőbe egy olyan lyukasztást, amelyen a ki nem lyukasztott hat kis négyzetlap olyan tartományt fed le, amelynek pontosan egy szimmetriatengelye van! (A mezőkre nyomtatott számoktól most eltekintünk.) Rajzolja be a szimmetriatengelyt!
Két kisiskolás a buszra várakozva beszélget. Áron azt mondja, hogy szeretné, ha a buszjegyen kilyukasztott három szám mindegyike prím lenne. Zita pedig azt reméli, hogy a számok összege 13 lesz. **c)** Mekkora valószínűséggel teljesül Áron, illetve Zita kívánsága? (4+3+9)

7. András edzőtáborban készül egy úszóversenyre, 20 napon át. Azt tervezte, hogy naponta 10 000 métert úszik. De az első napon a tervezettnél 10%-kal többet, a második napon pedig az előző napinál 10%-kal kevesebbet teljesített. A 3. napon ismét 10%-kal növelte az előző napi adagját, a 4. napon 10%-kal kevesebbet edzett, mint az előző napon, és így folytatta, páratlan sorszámú napon 10%-kal többet, pároson 10%-kal kevesebbet teljesített, mint a megelőző napon.
a) Hány métert úszott le András a 6. napon? **b)** Hány métert úszott le összesen a 20 nap alatt? **c)** Az edzőtáborozás 20 napjából véletlenszerűen választunk két szomszédos napot. Mekkora a valószínűsége, hogy András e két napon együttesen legalább 20 000 métert teljesített? (4+6+6)

8. A K középpontú és R sugarú kört kívülről érinti az O középpontú és r sugarú kör ($R>r$). A KO egyenes a nagy kört A és E, a kis kört E és D pontokban metszi. Forgassuk el a KO egyenest az E pont körül α hegyesszöggel! Az elforgatott egyenes a nagy kört az E-től különböző B pontban, a kis kört C pontban metszi.
a) Készítsen ábrát! Igazolja, hogy az $ABDC$ négyszög trapéz! **b)** Igazolja, hogy az ABC háromszög területe $t = R \cdot (R + r) \cdot \sin 2\alpha$!
c) Mekkora α szögnél lesz az ABC háromszög területe maximális, adott R és r esetén? (5+7+4)

9. Öt egyetemista: Bence, Kati, Márti, Pali és Zoli nyáron munkát szeretne vállalni egy üdülőhelyen. A helyi újságban több megfelelőnek látszó munkahelyet is találtak, mégpedig a következőket: három éttermet, amelyekbe csak fiúkat, két fodrászatot, amelyekbe csak lányokat vesznek fel és két fagyizót, amelyekbe viszont alkalmaznak fiúkat és lányokat is. (Egyik munkahelyen sincs létszámkorlátozás.)
a) Hányféleképpen helyezkedhet el az öt fiatal, ha mind az öten egymástól függetlenül döntenek az állásokról, és minden fiatal csak egy állást vállal? (Az azonos típusú munkahelyeket is megkülönböztetjük.)
b) Hányféleképpen helyezkedhet el az öt fiatal, ha a 2 lány nem akar ugyanazon a munkahelyen dolgozni, és a 3 fiú közül is bármelyik kettő különböző munkahelyre szeretne menni?
Bence, Kati, Pali és Zoli asztaliteniszben körmérkőzést akarnak játszani. (A körmérkőzés azt jelenti, hogy mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést játszik.) Az első este csak három mérkőzést játszanak le. **c)** Hányféle lehet a három mérkőzésben a játékosok párosítása, ha tudjuk, hogy négyük közül pontosan két játékos két-két mérkőzést játszott? (7+4+5)

1. ábra *Több ábra van, mint lehetséges lyukasztás!*

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

2. ábra *Két hely a próbálkozásra van!*

