

2009 október 20, emelt szint, 240 perc - Az 5.-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldani!

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket! **a)** $0,5^{2-\log_{0,5}x}=3$, ahol $x > 0$ és $x \in \mathbf{R}$. **b)** $7+6\log_x\frac{1}{2}=\log_2x$, ahol $1 < x \leq 2$ és $x \in \mathbf{R}$. (4+7)

2. István örömmel mesélte Péter barátjának, hogy egy négyszög alakú telket vett, amire majd házat akar építeni. Elmondása szerint a négyszög egyik szöge derékszög, és az ezt közrefogó mindkét oldal 20,0 m hosszú. A telek másik két oldala is egymással egyenlő hosszú, ezek 120° -os szöget zárnak be. **a)** Hány méter hosszú drót szükséges az üres telek bekerítéséhez?

„Mekkora házat szeretnél rá építeni?” – kérdezte Péter.

„Négyzet alapú sarokházat, és körülbelül 100 m^2 alapterületűt. A párommal a házat a derékszögű sarokba szeretnénk építtetni” – válaszolt István.

„Ha jól képzelem el a telek alakját, akkor az nagyon furcsa alakú lehet. Oda még egy kis faház sem fér el” – szölt nevetve Péter.

b) Rajzolja le, hogy milyen alakú az István által megvett telek, és milyennek képzelte el Péter!

c) Legfeljebb mekkora alapterületű, négyzet alapú sarokház férne el a telek derékszögű sarkába az egyik és mekkora a másik esetben? (Válaszát m^2 -re kerekítve adja meg!) (4+2+7)

3. Az **a** és **b** vektor koordinátái a t valós paraméter függvényében: **a**($\cos t$; $\sin t$) és **b**($\sin^2 t$; $\cos^2 t$).

a) Adja meg **a** és **b** koordinátáinak pontos értékét, ha t az $\frac{5\pi}{6}$ számot jelöli! **b)** Mekkora **a** és **b** hajlásszöge, ha $t = \frac{5\pi}{6}$? (egészre kerekített fokban)

c) Határozza meg a t olyan valós értékeit, amelyek esetén az **a** és **b** vektorok merőlegesek egymásra! (2+5+7)

4. Az (a_n) mértani és (b_n) számtani sorozatnak is 1 az első tagja, és mindkét sorozat hatodik tagja (-1) .

a) Sorolja fel mindkét sorozat első öt tagját! **b)** Milyen pozitív egész n -re lesz a két sorozat első n tagjának összege ugyanakkora? (4+9)

5. A Kovács családban 4 embernek kezdődik a keresztnéve B betűvel. Négyen teniszeznek, és négyen kerékpároznak rendszeresen. A család tagjairól még a következőket tudjuk: (1) csak Bea és Barbara jár teniszezni is és kerékpározni is; (2) egyedül Balázs nem üzi egyik sportágat sem; (3) Zoli próbálja testvérét, Borit a teniszezőktől hozzájuk, a kerékpározókhoz csábítani – sikertelenül. **a)** Legalább hány tagja van a Kovács családnak?

Egyik nap Barbara, Bea, Bori és Balázs barátaikkal vonaton utaztak, és hogy jobban teljen az idő, játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos. **b)** Legfeljebb hány tagú lehetett a társaság?

Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé

szölt. **c)** A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnévűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé? **d)** Mekkora a valószínűsége annak, hogy a **c)** pont szerinti ülésrend alakul ki, ha minden ülésrend egyenlően valószínű? (5+3+5+3)

6. Egy üzletben háromféle palackozott ecet van a polcon: 12 db 10%-os, 8 db 15%-os és 5 db 20%-os. Mindegyiket azonos csomagolásban, 1 literes kiszerezésben árulják. **a)** Hány százalékos ecetet kapnánk, ha a polcon lévő összes ecetet összeöntենék? **(3+5+8)**

Kázmér elképzelése az, hogy egy palack ecet árát az üres palack árából, a tömény ecet, valamint a tiszta víz literenkénti árából kalkulálják ki.

b) Az üres palack ára 30 Ft, a tömény ecet literje 500 Ft és a tiszta víz literje 10 Ft. Mennyibe kerülne a három különböző töménységű palackozott ecet az üzletben, ha a fogyasztói ár a Kázmér elképzelése szerint kalkulált ár 120%-a? (A fogyasztói árat a végén kerekítik egész forintra!)

Kázmér felírta a literes palackok bolti árait: a 10%-os ecet 144 Ft, a 15%-os 150 Ft, a 20%-os 156 Ft.

c) Ha fenti árakat a **b)** részben leírtak szerint kalkulálták, akkor ki lehet-e mindezekből számítani az üres palack, a tömény ecet és a tiszta víz árát?

7. Egy matematikus három német és négy magyar matematikust hívott vendégségbe szombat délutánra. Csütörtökön a házigazda és a 7 meghívott közül néhányan telefonon egyeztettek. A házigazda mindenkivel beszélt. Az azonos nemzetiségű vendégek egymást nem hívták, de a többiekkel mind beszéltek telefonon. Senki sem beszélt egy másik emberrel egynél többször, és minden beszélgetés pontosan két ember között zajlott.

a) Hány telefonbeszélgetést bonyolított le egymás között a 8 matematikus csütörtökön?

A telefonbeszélgetéskor minden meghívott vendég megmondta, hogy mekkora valószínűséggel megy el a szombati vendégségbe. Mindannyian ugyanazt a valószínűséget mondták. A házigazda tudta, hogy a meghívottak egymástól függetlenül döntenek arról, hogy eljönnek-e. Kiszámolta, hogy 0,028 annak a valószínűsége, hogy mindannyian eljönnek.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egy meghívott elmegy a vendégségbe? (Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!) **(5+11)**

8. Egy egyenlő szárú háromszög szárainak metszéspontja a $C(0 ; 7)$ pont, a száruk hossza $\sqrt{53}$ egység. A háromszög másik két csúcsa (A és B) illeszkedik az $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ egyenletű parabolára.

a) Számítsa ki az A és a B pont koordinátáit!

b) Írja fel az $ABC\Delta$ egyik szäregyenesének egyenletét! Ennek az egyenesnek és a parabolának a további közös pontja D . Mik a D pont koordinátái?

c) Mekkora területű részekre bontja az ABC háromszöget a parabola íve? **(6+4+6)**

9. Jancsi vázát készít. Egy 10cm sugarú, belül üreges gömbből levágott m magasságú ($m > 10$) gömbszelet határoló köréhez egy szintén m magasságú hengerpalástot ragaszt. A henger sugara megegyezik a gömbszeletet határoló kör sugarával. Mekkora legyen Jancsi a gömbszelet m magasságát, hogy a vázába a lehető legtöbb víz férjen? (A váza anyaga vékony, ezért a vastagságától eltekintünk, s hogy ne boruljon fel, egy megfelelő formájú

üreges fatalpra fogják állítani.) Tudjuk, hogy ha a gömbszelet magassága m , a határoló kör sugara pedig r , akkor a térfogata: $V = \frac{\pi}{6} m (3r^2 + m^2)$. **(16)**