

2010 május 5, emelt szint, 240 perc - Az 5.-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldani!

1. Adott az f és a g függvény. $f: D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbf{Z} \right\}; x \mapsto (\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x) \cdot \sin 2x$ **a)** Igazolja, hogy az így definiált f függvény konstans!

$g: D_g = [-7; 7]; x \mapsto x^2 - 6|x|$ **b)** Számítsa ki a g függvény zérushelyeit! **c)** Adja meg a g függvény értékkészletét! **(3+3+6)**

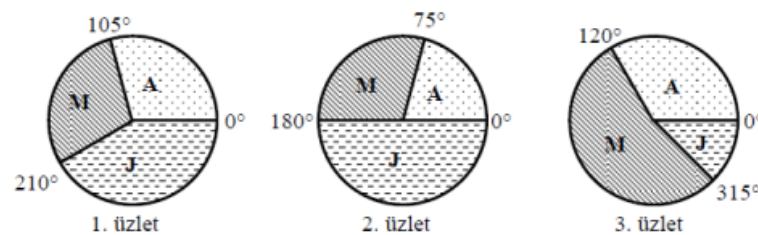
2. Kilenc számkártya fekszik az asztalon, 1-től 9-ig számozva. **a)** Rakja négy csoportba a kilenc számkártyát úgy, hogy egyikben se legyen együtt egy szám és egy nála kisebb osztója! Adjon meg két lehetséges csoportosítást! **b)** Berci körbe rakta a kilenc számkártyát egy nagy papírra, és ha két szám között legalább kettő volt a különbség, akkor a két kártyát összekötötte egy vonallal. Összesen hány vonalat rajzolt meg ily módon Berci?

Csaba az első hat kártya felhasználásával (1, 2, 3, 4, 5, 6) két háromjegyű számot készített. Hívjunk egy ilyen számpárt duónak. (Például egy lehetséges duó: „415 ; 362”). A hat számból több ilyen duót lehet készíteni. Két duót egyenlőnek tekintünk, ha ugyanaz a két különböző háromjegyű szám alkotja. Például a „415 ; 362” és a „362 ; 415” duó egyenlők, de a „362 ; 145” már egy másik duó. **c)** Hány különböző duót lehet a hat számkártyából készíteni? **(4+4+5)**

3. Mértani sorozat első három tagjának összege 91. A hatodik, hetedik és nyolcadik tag összege 2912. Hány tizenhárom-jegyű tag van a sorozatban? **(13)**

4. Egy könyvkiadó minden negyedévben összesíti, hogy három üzletében melyik szépirodalmi kiadványából fogyott a legtöbb. A legutóbbi összesítéskor mindhárom üzletben ugyanaz a három szerző volt a legnépszerűbb: Arany János, Márai Sándor és József Attila. Az alábbi kördiagramok szemléltetik, hogy az üzletekben milyen arányban adták el ezeknek a szerzőknek a műveit. A kördiagramok az első üzletből 408, a másodikból 432, a harmadikból 216 eladott könyv eloszlásait szemléltetik. **a)** A kördiagramok adatai alapján töltsse ki az alábbi táblázatot! Melyik szerző műveiből adták el a vizsgált időszakban a legtöbb könyvet? **b)** Készítsen a vizsgált időszakban a szerzők szerinti összesített forgalmat bemutató oszlopdiagramot!

	1. üzlet	2. üzlet	3. üzlet	Összesített forgalom
Arany János				
Márai Sándor				
József Attila				
Összesen	408	432	216	



A könyvkiadó a három üzletében minden eladott könyvhöz ad egy sorsjegyet. Ezek a sorsjegyek egy közös sorsoláson vesznek részt negyedévenként. A vizsgált időszakban azok a sorsjegyek vesznek részt a sorsoláson, amelyeket a fenti három szerző műveinek vásárlói kaptak. Két darab 50 ezer forintos könyvutalványt sorsolnak ki köztük. **c)** Mennyi annak a valószínűsége, hogy a vizsgált időszak sorsolásán mind a két nyertes sorsjegyet Márai Sándor egy-egy könyvéhez adták, és mindkét könyvet a 2. üzletben vásárolták? Válaszát három tizedesjegy pontossággal adja meg! **(5+3+5)**

5. Egy áruházban egy mosóport négyféle kiserelésben árusítanak. Az első kiserelés 50%-kal drágább a harmadiknál, és 20%-kal kevesebb mosópor van benne, mint a másodikban. A második 50%-kal több mosóport tartalmaz, mint a harmadik, és 25%-kal többbe kerül, mint az első. **a)** Az első három kiserelés közül melyikben a legalacsonyabb a mosópor egységára? A negyedik fajta kiserelést úgy állították össze, hogy annak dobozán a feltüntetett egységár megegyezett az első három kiserelés átlagos egységárával. **b)** Ha a legolcsóbb kiserelésű dobozon 600 Ft egységárat tüntettek fel, akkor hány forint egységár szerepel a negyedik fajta dobozon? **(13+3)**

6. Legyen $f(x) = -\frac{4x^3}{a} + \frac{3x^2}{a} + \frac{2x}{a} - a$, ahol a pozitív valós szám és $x \in \mathbf{R}$. **a)** Igazolja, hogy $\int_0^a f(x) dx = -a^3 + a$! **b)** Mely pozitív valós a számokra teljesül, hogy $\int_0^a f(x) dx \geq 0$? **c)** Az x mely pozitív valós értéke esetén lesz a $g(x) = -x^3 + x$ függvénynek lokális (helyi) maximuma? (6+4+6)

7. Az $ABCD$ konvex négyszög oldalegyenesei rendre: **DA**: $3x - 4y - 20 = 0$, **AB**: $3x + 5y - 20 = 0$, **BC**: $4x - 3y + 12 = 0$, **CD**: $5x + 3y + 15 = 0$.
a) Igazolja, hogy a négyszög átlói az x és az y tengelyre illeszkednek, továbbá hogy ennek a négyszögnek nincsen derékszöge! **b)** Bizonyítsa be, hogy ez a négyszög húrnégyszög! (8+8)

8. **a)** Peti levelet írt négy barátjának, Andrásnak, Bélának, Csabának és Daninak, és mindenkinek 1-1 fényképet is akart küldeni a nyaralásról. A négy fénykép különböző volt, és Peti mindegyikük hátlapjára ráírta, kinek szánja. A fényképeket végül figyelmetlenül rakta borítékba, bár mindenki kapott a levelében egy fényképet is. **a1)** Hányféleképpen fordulhat elő, hogy csak Andris kapja azt a fényképet, amelyen a saját neve szerepel? **a2)** Melyik esemény bekövetkezésének nagyobb a valószínűsége:

A: senki sem kapja azt a fényképet, amelyet Peti neki szánt; vagy **B:** pontosan egyikük kap olyan fényképet, amelyen a saját neve szerepel?
b) Egy szabályos érme egyik oldalán a 6-os, a másikon pedig a 4-es számjegy látható. Az érmét négyszer egymás után feldobjuk, és a dobott számokat összeadjuk. Milyen értékeket kaphatunk összeg gyanánt? Az egyes összegek dobásának mekkora a valószínűsége? (3+8+5)

9. Egy 90 m^2 területű, trapéz alakú virágágyás párhuzamos oldalainak aránya $AB : DC = 3 : 2$. Az ágyást tavasszal és ősszel is az évszaknak megfelelő virágokkal ültetik be. Mindkét alkalommal mindegyik fajta virágból átlagosan 50 virágtövet ültetnek négyzetméterenként. Tavasszal az átlókkal kijelölt négy háromszögre bontották a virágágyást. Az ABM háromszögbe sárga virágokat, a DMC háromszögbe fehérét, a maradék két részbe piros virágokat ültettek. **a)** A tavaszi parkosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek be?
 Ősszel a másik ábra alapján tervezték meg a virágok elhelyezését. (Az E, F, G és H pontok a trapéz oldalainak felezőpontjai.) Ekkor is fehér (f), piros (p) és sárga (s) virágokat ültettek a tervrajz alapján. **b)** Az őszi parkosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek? Válaszait az alábbi táblázatban tüntesse fel! (9+7)

	fehér	piros	sárga
tavasszal			
ősszel			

