2007. október 25. Emelt

1. a) Lösen Sie die folgende Gleichung in der Menge der reellen Zahlen! $x^2 = |x-6|$

b) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem in der Menge der reellen Zahlenpaare! $\begin{array}{l} lg(x+y) = 2\,lg x \\ lg\,x = lg 2 + lg(y-1) \end{array}$ (5 + 9)

2. Eine Familie besitzt ein rechteckförmiges Grundstück, deren benachbarten Seiten 68 m bzw. 30 m lang sind. In der einen Ecke des Grundstücks wurde ein Rasensprenger so befestigt, dass er von der kürzeren Seite des Grundstückes 4 m weit und von der benachbarten Seite 3 m entfernt ist. Der sich drehende Kopf des Rasensprengers bewässert das Gebiet von der Befestigungspunkt mindestens 0,5 m und höchstens 4 m weit entfernt. Wie großes Gebiet von dem Grundstück wird durch der Rasensprenger bewässert und wie viel Prozent von dem Gebiet des ganzen Grundstückes ist das? (11)

3. Ein Mitarbeiter möchte seine Prämie 1 000 000 Forint, die er am Jahresende erhalten hat, bis zu dem nächsten Sommer, sechs Monate lang verzinsen lassen. Er hat zwei günstige Angebote erhalten. Er wählt entweder eine Bindungsdauer von zwei Monaten mit einem zweimonatigen Zinsen von 1,7%, wobei die Zinsen jeden zweiten Monat gutgeschrieben wird, oder wechselt er den Forint zu Euro und bindet das Geld mit einer monatliche Zinsen von 0,25% für sechs Monate fest, wobei die Zinsen jeden Monat gutgeschrieben werden.
a) Wie viel Geld würde er, nach sechs Monaten in dem ersten Fall auf dem Forintkonto haben? (Sie müssen das Ergebnis auf Forint gerundet angeben!)
b) Wie viel Euro könnte er nach sechs Monaten bekommen, wenn er das zweite Angebot gewählt hat, und zu dieser Zeit ein Euro genau 252 Forint wert ist? (Das Ergebnis müssen Sie auf zwei Dezimalstellen gerundet angeben!)
c) Um wie viel Prozent sollte der Kurs 252 Forint/Euro sich während der Monaten ändern, damit das zweite Angebot günstiger wird? (Das Ergebnis müssen Sie auf zwei Dezimalstellen gerundet angeben!) (3 + 4 + 5)

4. Wir werfen gleichzeitig 6 regelmäßige Würfeln, die verschiedene Farben haben. **a)** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit davon, dass wir mit jedem Würfel verschiedene Zahlen würfeln? **b)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit davon, dass bei einem Wurf die Augensumme der sechs Würfeln mindestens 34 wird!(5+9)

5. Der Umkreisradius des Dreiecks ABC ist 26 cm, $BAC\sphericalangle = 60°$. **a)** Berechnen Sie die Seitenlänge BC ! **b)** Wie viel Grad betragen die beiden anderen Winkel des Dreiecks, wenn die Seite AC b cm, und die Seite AB $3b$ cm lang ist? Die gesuchten Werte müssen Sie auf eine Dezimalstelle gerundet angeben! (4 + 12)

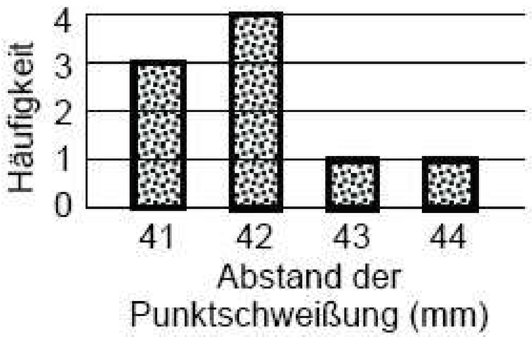
6. Gegeben ist die Funktion $f:]-1; 6[\to \mathbf{R};\ f(x) = -4x^3 + 192x$. **a)** Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f und beschreiben Sie die Funktion f nach ihrem Monotonitätsverhalten! Bezeichne c einen positiven Wert von der Definitionsmenge der Funktion f. **b)** Bestimmen Sie den Wert von c so, dass die ebene Figur, begrenzt durch den $[0 ; c]$ Abschnitt der x-Achse, die Gerade mit der Gleichung $x - c = 0$ und den Graph der Funktion f, den Flächeninhalt von 704 Flächeneinheiten beträgt! (7 + 9)

7. Früher wurde das Volumen der kegelstumpfförmigen Gegenstände durch eine Näherungsberechnung bestimmt, die eine genügende Genauigkeit für die Praxis lieferte. Daraufhin das Volumen eines Kegelstumpfes ist annäherungsweise gleich mit dem Volumen eines Zylinders, dessen Durchmesser gleich der Mittelwert der unteren und oberen Durchmesser des Kegelstumpfes ist und dessen Höhe gleich die Höhe des Kegelstumpfes ist.
a) Die Länge eines kegelstumpfförmigen Baumstammes (also die Höhe des Kegelstumpfes) ist 2 m, der untere Durchmesser ist 12 cm und der obere Durchmesser ist 8 cm. Um wie viel Prozent weicht das Volumen der Näherungsberechnung von dem tatsächlichen Volumen ab? (Das wird als

relativer Fehler der Näherungsberechnung bezeichnet.)
b) Beweisen Sie, dass das Volumen, das durch dem oben beschriebenen Näherungsberechnung erhalten wird nie größer ist als das genaue Volumen des Kegelstumpfes!
Bezeichne x das Verhältnis der beiden Grundkreisradien des Kegelstumpfes und sei $x > 1$. Man kann beweisen, dass der relative Fehler der oben angegebenen Näherungsberechnung im Prozent gemessen die folgende Funktion angibt: $f:]1;+\infty[\to R;\ f(x) = 25 \cdot \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$.
c) Beweisen Sie, dass f keine Extremwerte besitzt! (3 + 7 + 6)

8. Sechs Schwimmer A, B, C, D, E und F starten im Finale des Schmetterlingschwimmens 100m. In einem Wettbüro kann man in einem Tippschein auf die ersten drei Plätze dieser Finale wetten. Ein Tippschein ist gültig, wenn der Erstplatzierte, der Zweitplatzierte und der Drittplatzierte genannt wurden. Der Tippschein ist ungültig, wenn der Tipper bei der Platzierung keine Namen schreibt, oder einen Namen außer den sechs Wettkämpfern schreibt, oder einen Namen öfter aufzählt. Es gibt kein totes Rennen und man kann nicht darauf wetten.
a) Wie viele Scheine soll derjenige ausfüllen, der für jede Möglichkeit eine gültige Wette schließen möchte? (3 + 13)
Das Ergebnis der Finale wurde folgendes: Erstplatzierte wurde A, Zweitplatzierte wurde B und Drittplatzierte wurde C.
b) Wie viele Scheine mit mindestens einen Treffer hat ein Wetter gehabt, der für jedes mögliche Ergebnis mit einem gültigen Tippschein gewettet hat. (Die Anzahl der Treffer auf einen Tippschein, entspricht die Anzahl der Übereinstimmungen der Platzierungen der Schwimmer mit den auf dem Schein geschriebenen Tipps.)

9. Ein Industrieroboter hat die Aufgabe auf der Platte, die auf dem Arbeitstisch liegt Punktschweißungen durchzuführen. Auf jeder einzigen Platte führt er eine Punktschweißung in gegebenen Abstand von dem Rand durch. Bei der Inspektion wird kontrolliert, in welchen Abstand der Roboter die Schweißung durchgeführt hat. Für die Messung wird ein digitales Gerät verwendet, dessen Anzeiger der gemessene Abstand in Millimeter angibt.
Der Qualitätskontrolleur hat auf Geratewohl neun Platten, von denen, die schon fertig waren ausgewählt und hat die Abstände der folgenden Häufigkeitstabelle entsprechend gemessen.



a) Berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung der gemessenen Abstände!
Wenn der Qualitätskontrolleur auf beliebigen 10 auf Geratewohl ausgewählten Platten eine Standardabweichung, die größer als 1 mm ist bemerkt, dann soll der Roboter gestoppt werden und die Einstellung der Roboter soll erneut durchgeführt werden.
b) Wir wissen, dass der Kontrolleur zu den neun ausgewählten Platten so eine Platte gewählt hat, dass die Qualitätsanforderung entsprechend der Roboter nicht gestoppt werden sollte. (Die Daten dieser neun Platten wurden am Anfang der Aufgabe angegeben!) Wie großer Abstand konnte der Qualitätskontrolleur bei der zehnten Platte (mit dem oben beschriebenen Gerät) messen? (5 + 11)

Von den Aufgaben 5-9. müssen Sie vier beliebig ausgewählte Aufgaben lösen. Die Nummer der nicht ausgewählten Aufgabe schreiben Sie bitte ins leere Kästchen auf der Seite 3!