

2010 május 5, emelt szint, 240 perc - Az 5.-9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldani!

1. **a)** Lösen Sie das folgende Gleichungssystem in der Menge der reellen Zahlenpaare!
$$\begin{cases} \log_2(xy^3)=1 \\ \log_2(x^3y)=-3 \end{cases}$$
- b)** Bestimmen Sie die Menge aller positiven ganzen Zahlen für k , für die der Ausdruck $\log_{3^k} 729$ eine positive reelle Zahl wird! (7+5)
2. **a)** Weisen Sie nach, dass das Viereck, das durch die Punkte $A(0; 1)$, $B(4; 2)$, $C(3; 6)$ und $D(-5; 4)$ gegeben ist, ein Trapez ist!
- b)** Kati hat einen einfachen vollen Graphen gezeichnet, der 253 Kanten hat und unter seinen Knoten auch die Eckpunkte des Trapezes A; B; C; D vorkommen. Wie viele neue Knoten musste sie noch im Graf dazu nehmen? Höchstens wie viele Kanten kann man vom Graphen löschen, damit der noch zusammenhängend bleibt? (4+8)
3. Eine Fluggesellschaft veranstaltet mit ihren Flugzeugen Flüge zwischen zwei europäischen Großstädten. Die Flüge starten bei mindestens 10 Fluggästen und können höchstens 36 Fluggäste transportieren. Die Gesellschaft möchte die Auslastung der Flüge verbessern. Unter anderen nehmen sie die Wirtschaftlichkeit nach folgenden Regeln unter der Lupe: bei 20 oder weniger Fluggästen starten sie ein Flugzeug für 16 000 Ft pro Person. Bei einer Anzahl über 20 Personen verringert sich der Tarif für jeden Fluggast *so oft um 400 Ft*, wie die Anzahl der Fluggäste über 20 liegt. **a)** Geben Sie die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto B(x)$ der Funktion B an, indem x die Anzahl der Fluggäste und $B(x)$ das Einkommen der Gesellschaft bei einem Flug mit x Fluggästen bezeichnet! Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion B ? **b)** Bei wie vielen Fluggästen mit einem Flug ist das Einkommen am größten und wie groß ist das maximale Einkommen? (6+7)
4. Nach Erhebungen unter den Besitzern eines Internetanschlusses kaufen sich 17% etwas über das Internet und 33% von ihnen laden sich Software vom Internet herunter. Laut der Statistik nehmen 14% der Internetbenutzer beide Dienstleistungen in Anspruch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse? **a)** Eine zufällig ausgewählte Person, die über einen Internetanschluss verfügt, kauft nicht im Internet ein. **b)** Eine zufällig ausgewählte Person, die über einen Internetanschluss verfügt, kauft etwas über das Internet oder lädt Software herunter. (Es ist zulässig, dass er eventuell beide Dienstleistungen in Anspruch nimmt.) **c)** Eine zufällig ausgewählte Person, die über einen Internetanschluss verfügt, kauft weder über das Internet noch lädt sie Software herunter. **d)** Von drei zufällig ausgewählte Personen, die über einen Internetanschluss verfügen, kauft keine über das Internet ein. (Die Auswahl wird mit Zurücklegen durchgeführt.) (3+4+3+4)
5. In einem Schuljahr war am Jahresende die Anzahl der Schüler einer Schule mehr als 400, aber hat die 430 nicht erreicht. Am Jahresende wurde der Durchschnittswert der Schulleistungen der Jungen 4,01, der der Mädchen 4,21, wobei der von allen Schülern der Schule 4,12. (Die drei Durchschnittswerte sind alle genaue Werte.) Wie viele haben die Schule am gegebenen Jahresende besucht? (16)
6. Auf einem horizontalen Gelände wurde eine 6 Meter tiefe Grube gegraben, die nach unten verschmälert und von viereckigen Platten begrenzt wird. Der Grundboden der Grube ist auch horizontal. Die Öffnung der Grube ist ein 8x8 Meter großes Quadrat, zwei gegenüber liegende Platten sind vertikal und die zwei weiteren schließen einen Winkel von 75° , beziehungsweise 60° mit der Bodenfläche ein. (Die zwei gegenüberliegenden, „schiefen“

Platten schließen miteinander einen Winkel von 45° ein.) **a)** Zeichnen Sie von der Grube den Querschnitt, der senkrecht auf den schiefen Platten (und so auch auf die Bodenfläche) steht! Stellen Sie in der Abbildung auch die Daten dar! **b)** Wie viel Kubikmeter musste man bei der Anfertigung der Grube ausgraben? Geben Sie das Ergebnis m^3 genau an! (4+12)

7. Die Klasse 12.A hat fünf Eintrittskarten für das Finale der Wasserballmeisterschaft bekommen. Alle 30 Schüler der Klasse würden gerne gehen, obwohl 12 Schüler zu diesem Zeitpunkt Privatstunden haben. Sie überlassen die Wahl dem Zufall: sie schreiben alle 30 Namen auf je einem Zettel und ziehen davon 5 heraus. **a)** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den ausgewählten Schülern genau 2 eine Privatstunde hätten? Geben Sie das Ergebnis in Dezimalbruch an! **b)** Wir wissen, dass unter den fünf ausgewählten Schülern bestimmt jemand Privatstunde hat. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei ausgewählte Schüler Privatstunde haben?

Nach dem Finale berichten die fünf Schüler über das Spiel folgenderweise:

A: Die Mannschaft, die verloren hat, hat mehr als 4 Tore geschossen. **B:** Die Siegermannschaft hat 3 Tore mehr als die Verlierermannschaft geworfen. **C:** Insgesamt wurden mehr als 10 aber weniger als 28 Tore während des Spiels erzielt. **D:** Die Summe der von beiden Mannschaften geschossenen Tore ist eine Primzahl. **E:** Die Verlierermannschaft hat auch eine Primzahl als Tore geschossen.

c) Man weiß, dass alle fünf Schüler die Wahrheit gesagt haben. Kann man davon eindeutig das Ergebnis des Spieles bestimmen? (4+7+5)

8. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ und $\{c_n\}$ sind geometrische Folgen von ganzen Zahlen. Zwischen den Quotienten und bestimmten Folgenglieder gelten folgende Zusammenhänge: **(1)** a_1 , b_1 und c_1 sind in dieser Reihenfolge die nacheinander folgenden Glieder einer geometrische Folge, dessen Quotient 2 beträgt; **(2)** Die Quotienten der Folgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ und $\{c_n\}$ sind in dieser Reihenfolge die nacheinander folgenden Glieder einer arithmetischen Folge, deren Differenz 1 ist; **(3)** $a_2 + b_2 + c_2 = 24$; **(4)** $c_1 + c_2 + c_3 = 84$. Geben Sie die ersten drei Glieder jeder ursprünglichen geometrischen Folge an! (16)

9. Bestimmen Sie für die Parabelgleichung $y = x^2 - 4x - 12$ den Scheitelpunkt C, sowie ihre Schnittpunkte mit der x-Achse: A und B. **a)** Berechnen Sie den Radius des Innenkreises im Dreieck ABC ! **b)** Der wievielte Teil ist die Fläche des Dreiecks ABC von der Fläche, die die Parabel und die x-Achse miteinander einschließen? (8+8)